

CIREM Working Paper Series

ISSN number : 3079-8426

WORKING PAPER
No. 2025/001-03

UNIVERSITÉ PROTESTANTE AU CONGO

Introduction aux hypertopologies

BIEN-AIMÉ KIAKISOLAKO

Cite as :

Kiakisolako, Bien-Aimé Makimona, 2025, “Introduction aux hypertopologies,” CIREM Working Paper, no. 2025/001-03.

© January 2025 CIREM WPS. All rights reserved.

Centre Interuniversitaire de Recherche en Économie Mathématique

Center for Interuniversity Research on Mathematical Economics.

Éditorial

CIREM WORKING PAPER SERIES est une collection de travaux de recherche publiés par le Centre Interuniversitaire de Recherche en Économie Mathématique (CIREM), basé à l'Université Protestante au Congo (UPC). La série vise à diffuser des recherches théoriques et appliquées en mathématiques et en économie, couvrant des domaines tels que la microéconomie, la macroéconomie, l'économétrie, la statistique, la théorie des jeux, les modèles d'équilibre général, ainsi que des travaux en philosophie, épistémologie, métamathématique et logique.

Les travaux publiés sont soumis à une sélection rigoureuse et à un processus d'arbitrage interne garantissant leur qualité scientifique et leur pertinence académique. Cette démarche vise à offrir aux chercheurs un espace de discussion et d'enrichissement de leurs analyses, aux décideurs des perspectives fondées sur des approches rigoureuses, et aux praticiens des outils et modèles adaptés aux réalités économiques. L'objectif de la série est, d'une part, de favoriser un affinage critique du contenu des travaux de recherche sélectionnés et, d'autre part, de les rendre accessibles aux chercheurs, décideurs et praticiens avant leur soumission formelle à des revues académiques ou à d'autres instances de publication.

Directeur de publication

Jean-Paul K. Tsasa

Membres du comité éditorial

Jean-Pierre Afumba, Patrick Bakengela, Josue Diwambuena, Karim Omonga, Dieumerici Zumbu.

CIREM – Centre Interuniversitaire de Recherche en Économie Mathématique
Université Protestante au Congo (Campus du Centenaire)

Adresse : Croisement des avenues de Libération et, Boulevard Triomphal,
B.P. 4745 Kinshasa II, Lingwala, RDC

Email : cirem@upc.ac.cd

Site web : <https://upc.ac.cd/cirem-working-paper-series>

Tél. : +243 81 94 93 358

X : @CIREMath

Introduction aux hypertopologies

Bien-Aimé Kiakisolako*

Résumé

Cet article présente les hypertopologies. Généralement, on sait comment construire une topologie sur un ensemble X à partir d'une semi-métrique, d'une uniformité, d'une base ou d'une sous-base donnée sur cet ensemble. Cependant, il est quelque peu plus fastidieux de construire une hypertopologie, i.e. une topologie sur la famille des parties fermées non vides de X telle que l'application $h : x \mapsto \{x\}$ est un homéomorphisme de X sur son image. En outre, peu de travaux en mathématiques s'intéressent aux hypertopologies malgré leur lien avec les espaces des fonctions. Ce papier propose de combler tant soit peu ce creux en s'attellant sur la caractérisation des hypertopologies de Hausdorff et de Vietoris.

Mots-clés : Hypertopologie, hyperspace, Vietoris, Hausdorff.

Abstract

In this paper, we introduce hyperspace topologies. It is common knowledge how to generate a topology on a set X from a semimetric, a uniformity, a base or a subbase. However, it is laborious to build a hyperspace topology, i.e. a topology on the set of closed and non-empty subsets of X such that the map $h : x \mapsto \{x\}$ is a homeomorphism of X onto its image. Besides, few published works talk about hypertopologies despite of their connections with function spaces. This paper aims to fill this emphasizing Hausdorff and Vietoris hypertopologies.

Keywords: Hypertopology, hyperspace, Vietoris, Hausdorff.

*CIREM UPC, Center for Interuniversity Research on Mathematical Economics, Department of Economics. Email : bkiakisolako@gmail.com.

1 Introduction

Nous supposons connues les notions préliminaires de la topologie générale comme la continuité, les homéomorphismes, la topologie induite, les axiomes de séparation (accessibilité), les applications lipschitziennes.

Étant donné un espace topologique (X, τ) et $A \subset X$, on sait construire une topologie τ_A sur A , appelée topologie induite sur A par τ et qui a un lien étroit avec la topologie τ .

L'idée ici est de faire "l'inverse", i.e. à partir d'un espace topologique (X, τ) donné construire des topologies sur un ensemble contenant X et qui vérifient certaines propriétés relatives à la topologie τ .

Si (X, τ) est un espace topologique accessible, notons $Fe_\tau(X) = \{A \subset X : \emptyset \neq A \text{ est } \tau\text{-fermé}\}$, l'ensemble des τ -fermés non vides de X .

2 Définition

Une topologie φ sur $Fe_\tau(X)$ est une hypertopologie si l'application $h : X \mapsto \{\{x\} : x \in X\}$, $x \mapsto \{x\}$ est un homéomorphisme de X sur $\{\{x\} : x \in X\} \equiv H$ pour τ et $\varphi_H \equiv$ topologie induite sur H par φ .

Dans ce cas, un sous ensemble de $Fe_\tau(X)$ muni d'une hypertopologie φ est appelé hyperspace de X (?).

3 Pourquoi étudier les hypertopologies ?

Sachant que les hypertopologies ont un lien de compatibilité avec la topologie de départ, leur étude nous permettra de :

- Déterminer les propriétés qu'elles héritent de la topologie de départ ;
- Déterminer les invariants topologiques ;
- Trouver les liens qui existent entre les différents hyperspaces d'un même ensemble.

4 Exemples

Cette section présente deux hypertopologies célèbres, une engendrée par une métrique et l'autre par une topologie.

4.1 L'hypertopologie de Hausdorff

L'hypertopologie de Hausdorff est engendrée par une métrique H_d dite métrique de Hausdorff.

4.1.1 La métrique de Hausdorff venant d'une semi-métrique bornée

Soit d une semi-métrique bornée sur un ensemble non vide X et $A, B \in Fe_{\tau_d}$ avec τ_d la topologie engendrée par d .

Si on définit $H_d(A, B)$ par :

$$H_d(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\} \text{ alors } H_d \text{ est une métrique sur } Fe_{\tau_d}$$

Preuve

$$1. \forall A, B \in Fe_{\tau_d}(X), 0 \leq H_d(A, B) \in \mathbb{R}$$

En effet, d étant bornée $\exists$ réel $t > 0$ tel que $\forall x \in X, 0 \leq d(x, y) \leq t$

Si $A, B \in Fe_{\tau_d}(X)$ alors :

$$— A \neq \emptyset \Rightarrow \exists w \in A$$

Alors :

$$b \in B \in Fe_{\tau_d}(X) \Rightarrow 0 \leq d(b, A) = \inf\{d(b, x) : x \in A\} \leq d(b, w) \leq t$$

$$\Rightarrow 0 \leq d(b, A) \leq t \forall b \in B$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq \{d(b, A) : b \in B\} \text{ est majoré par } t \text{ dans } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sup\{d(b, A) : b \in B\} \in \mathbb{R}$$

$$— B \neq \emptyset \Rightarrow \exists v \in B$$

Alors,

$$a \in A \in Fe_{\tau_d}(X) \Rightarrow 0 \leq d(a, B) = \inf\{d(a, y) : y \in B\} \leq d(a, v) \leq t$$

$$\Rightarrow 0 \leq d(a, B) \leq t \forall a \in A$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq \{d(a, B) : a \in A\} \text{ est par } t \text{ dans } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sup\{d(a, B) : a \in A\} \in \mathbb{R}$$

Ainsi, on a :

$$0 \leq \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\} \in \mathbb{R}.$$

D'où $H_d : Fe_{\tau_d}(X) \times Fe_{\tau_d}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $0 \leq H_d(A, B)$

$$2. H_d(B, B) = 0 \quad \forall B \in Fe_{\tau_d}(X).$$

Soit $b \in B$.

$$b \in B \Rightarrow d(b, B) = 0$$

$$\Rightarrow \{d(b, B) : b \in B\} = \{0\}$$

$$\Rightarrow \sup\{d(b, B) : b \in B\} = \sup\{0\} = 0$$

$$\Rightarrow H_d(B, B) = \max\{\sup_{b \in B} d(b, B), \sup_{b \in B} d(b, B)\} = \max\{0, 0\} = 0$$

$$\text{D'où } \Rightarrow H_d(B, B) = 0 \quad \forall B \in Fe_{\tau_d}(X).$$

$$3. H_d(A, B) = H_d(B, A) \quad \forall A, B \in Fe_{\tau_d}(X)$$

En effet,

$$H_d(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}$$

$$= \max\{\sup_{b \in B} d(b, A), \sup_{a \in A} d(a, B)\}$$

$$= H_d(B, A).$$

$$4. H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) \quad \forall A, B, C \in Fe_{\tau_d}(X)$$

(a) Si $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, avec d une semi-métrie, on a :

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$$

$$\text{ie } d(a, b) < \max\{\sup_{p \in A} d(p, B), \sup_{q \in B} d(q, A)\} = H_d(A, B)$$

$$\text{et } d(b, c) < \max\{\sup_{q \in B} d(q, C), \sup_{r \in C} d(r, B)\} = H_d(B, C)$$

$$\Rightarrow d(a, b) + d(b, c) < H_d(A, B) + H_d(B, C)$$

$$\Rightarrow d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) < H_d(A, B) + H_d(B, C)$$

$$\Rightarrow d(a, c) < H_d(A, B) + H_d(B, C)$$

(b) En raisonnant de la même façon, on a aussi $d(c, a) < H_d(A, B) + H_d(B, C)$

4b $\Rightarrow \sup\{d(c, a) : c \in C\} < H_d(A, B) + H_d(B, C)$ et **4a** $\Rightarrow \sup\{d(a, c) :$

$$\begin{aligned}
a \in A \} &< H_d(A, B) + H_d(B, C) \\
\Rightarrow \max\{\sup_{a \in A} d(a, C), \sup_{c \in C} d(c, A)\} &< H_d(A, B) + H_d(B, C) \\
\Rightarrow H_d(A, C) &\leq H_d(A, B) + H_d(B, C)
\end{aligned}$$

$$5. H_d(A, B) = 0 \Rightarrow A = B$$

Soient $A, B \in Fe_{\tau_d}(X)$

$$(a) 0 \leq \sup_{a \in A} d(a, B) \leq \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) = H_d(A, B) = 0$$

$$\Rightarrow \sup_{a \in A} d(a, B) = 0$$

Soit $x \in A$,

$$d(x, B) \leq \sup_{a \in A} d(a, B) = 0 \Rightarrow d(x, B) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \overline{B} = B$$

$$\Rightarrow x \in B, \text{ i.e. } A \subset B$$

$$(b) \text{ Avec un raisonnement analogue, on trouve que } B \subset A.$$

$$\text{D'où } A = B$$

4.1.2 La métrique de Hausdorff venant d'une semi-métrique

Si d est une semi-métrique pas nécessairement bornée sur $X \neq \emptyset$. La fonction $\varphi(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ est une semi-métrique bornée sur X qui engendre la même topologie que d , i.e. $\tau_d = \tau_\varphi$.

En effet, $\forall x, y \in X, 0 \leq \varphi(x, y) \leq \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} \leq 1$.

Dans ce cas, on construit la métrique H_d avec la semi-métrique bornée φ comme dans 4.1.1. La métrique H_d ainsi définie est appelée métrique de Hausdorff et il engendre sur $Fe_{\tau_d}(X)$ une topologie τ_{H_d} .

L'espace métrisable $(Fe_{\tau_d}, \tau_{H_d})$ étant accessible, $\forall x \in X, \{x\}$ est fermé.

τ_{H_d} est une hypertopologie

1. Si d est une semi-métrique bornée sur $X, H_d(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}$
2. Si d n'est pas bornée, prendre $\varphi = \frac{d}{1+d}$ qui est une semi-métrique bornée telle que $\tau_d = \tau_\varphi$, i.e. $Fe_{\tau_d}(X) = Fe_{\tau_\varphi}(X)$

Soit $h : (X, d) \longmapsto (Fe_{\tau_d}(X), H_d), x \mapsto \{x\}$.

Si $x, y \in X$, $H_d(h(x), h(y)) = H_d(\{x\}, \{y\}) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, \{y\}), \sup_{b \in B} d(b, \{x\})\} = \max\{\sup d(x, y), \sup d(x, y)\} = \max\{d(x, y), d(x, y)\} = d(x, y)$

$\Rightarrow H_d(h(x), h(y)) = d(x, y) \forall x, y \in X$, i.e. h est une isométrie pour d et H_d .
 $\Rightarrow h$ est continue sur X pour τ_d et τ_{H_d} .

De même $h^{-1} : h[X] = \{\{x\} : x \in X\} \mapsto X$ est une isométrie sur $h(X)$ pour τ_{H_d} et τ_d .

$\Rightarrow h$ est un homéomorphisme de X sur $h[X]$

D'où τ_{H_d} est une hypertopologie.

4.2 L'hypertopologie de Vietoris

Soit (X, τ) un espace topologique avec $X \neq \emptyset$ et $\forall n \in \mathbb{N} V_1, V_2, \dots, V_n$ des τ -ouverts de X .

On pose :

- $[V_1, V_2, \dots, V_n] \equiv \{A \in Fe_\tau(X) : A \subset \cup_{i=1}^n V_i \text{ et } A \cap V_i \neq \emptyset \forall i = 1, 2, \dots, n\}$
- $\mathcal{A} = \{[V_1, V_2, \dots, V_n] : n \in \mathbb{N}\} \subset \wp(Fe_\tau(X))$
- $\tau_v = \tau(\mathcal{A}) = \{\bigcup \mathcal{E} : \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}$

Alors τ_v est une hypertopologie appelée hypertopologie de Vietoris (??).

Preuve

1. τ_v est une topologie sur $Fe_\tau(X)$

(a) Montrons que $\mathcal{A}$ est une base de τ_v .

- $[X] \in \mathcal{A}$ car $X \in \tau$ or $[X] = Fe_\tau(X)$ car :
 - i) $[X] \subset Fe_\tau(X)$ par définition
 - ii) $M \subset Fe_\tau(X) \Rightarrow \emptyset \neq M \in X$ et $M \cap X \neq \emptyset \Rightarrow M \in [X]$.
 On a donc $Fe_\tau(X) = [X] \in \mathcal{A}$. D'où $Fe_\tau(X) \subset \bigcup \mathcal{A}$
- Clairement $\mathcal{A} \subset \wp(Fe_\tau(X))$, on a : $\bigcup \mathcal{A} \subset Fe_\tau(X)$

Ce qui montre que $\bigcup \mathcal{A} = Fe_\tau(X)$

(b) Soient $A, B \in \mathcal{A}$ et $D \in A \cap B$.

- $D \in A \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \exists$ des τ -ouverts $V_1, V_2, \dots, V_n$ tels que $D \in A = [V_1, V_2, \dots, V_n]$ c'est-à-dire $D \subset \cup_{i=1}^n V_i$ et $\forall i \in \{1, \dots, n\}, D \cap V_i \neq \emptyset$.
- $D \in B \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \exists$ des τ -ouverts $W_1, W_2, \dots, W_m$ tels que $D \in B = [W_1, W_2, \dots, W_m]$ c'est-à-dire $D \subset \cup_{i=1}^m W_i$ et $\forall i \in \{1, \dots, m\},$

$$D \cap W_i \neq \emptyset.$$

Posons $F = [V_1 \cap \bigcup_{i=1}^m W_i, V_2 \cap \bigcup_{i=1}^m W_i, \dots, V_n \cap \bigcup_{i=1}^m W_i, W_1 \cap \bigcup_{i=1}^n V_i, W_2 \cap \bigcup_{i=1}^n V_i, \dots, W_m \cap \bigcup_{i=1}^n V_i]$, clairement $F \in \mathcal{A}$

Pour $G \in F$ on a :

$G \in Fe_\tau(X)$ tel que

$$G \subset ((V_1 \cap \bigcup_{i=1}^m W_i) \cup (V_2 \cap \bigcup_{i=1}^m W_i), \dots, (V_n \cap \bigcup_{i=1}^m W_i), (W_1 \cap \bigcup_{i=1}^n V_i), (W_2 \cap \bigcup_{i=1}^n V_i), \dots, (W_m \cap \bigcup_{i=1}^n V_i)) \text{ et } \forall k, G \cap (V_k \cap \bigcup_{i=1}^m W_i) \neq \emptyset, G \cap (W_k \cap \bigcup_{i=1}^n V_i) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow G \subset \bigcup_{i=1}^n V_i \cap \bigcup_{i=1}^m W_i \text{ et } \forall k, \exists j \text{ tel que } G \cap V_k \cap W_j \neq \emptyset \text{ et } G \cap W_k \cap V_j \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow G \subset \bigcup_{i=1}^n V_i \text{ et } G \subset \bigcup_{i=1}^m W_i \text{ et } \forall k, G \cap V_k \neq \emptyset, G \cap W_k \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow G \subset \bigcup_{i=1}^n V_i \text{ et } \forall k, G \cap V_k \neq \emptyset, G \subset \bigcup_{i=1}^m W_i \text{ et } \forall k, G \cap W_k \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow G \in A \text{ et } G \in B$$

$$\Rightarrow G \in A \cap B$$

D'où $F \subset A \cap B$.

Il reste à montrer que $D \in F$.

$$D \in A \cap B \Rightarrow D \subset \bigcup_{i=1}^n V_i \text{ et } \forall i, D \cap V_i \neq \emptyset, D \subset \bigcup_{i=1}^m W_i \text{ et } \forall i, D \cap W_i \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow D \subset \bigcup_{i=1}^n V_i \cap \bigcup_{i=1}^m W_i$$

On a :

$$\forall k, D \cap (W_k \cap \bigcup_{i=1}^n V_i) = (D \cap W_k) \cap (D \cap \bigcup_{i=1}^n V_i)$$

$$= (D \cap W_k) \cap D, \text{ car } D \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$$

$$= D \cap W_k \neq \emptyset$$

$$\text{C'est-à-dire } \forall k, D \cap (W_k \cap \bigcup_{i=1}^n V_i) \neq \emptyset$$

et

$$\forall k, D \cap (V_k \cap \bigcup_{i=1}^m W_i) = (D \cap V_k) \cap (D \cap \bigcup_{i=1}^m W_i)$$

$$= (D \cap V_k) \cap D, \text{ car } D \subset \bigcup_{i=1}^m W_i$$

$$= D \cap V_k \neq \emptyset$$

$$\text{C'est-à-dire } \forall k, D \cap (V_k \cap \bigcup_{i=1}^m W_i) \neq \emptyset$$

D'où $\forall A, B \in \mathcal{A} \ \forall D \in A \cap B, \exists F \in \mathcal{A}$ tel que $D \in F \subset A \cap B$ ce qui montre que τ_v est une topologie sur $Fe_\tau(X)$ de base $\mathcal{A}$.

2. τ_v est une hypertopologie (?).

Il s'agit de montrer que l'application $h : X \mapsto \{\{x\} : x \in X\}, x \mapsto \{x\}$ est un homéomorphisme de X sur $\{\{x\} : x \in X\}$.

— L'application h est continue.

Preuve

Soit $x \in X$ et H un τ_v -voisinage de $h(x) = \{x\}$.

Alors il existe $G \in \mathcal{A}$ tel que $\{x\} \in G \subset H$.

$G \in \mathcal{A} \Rightarrow$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et il existe des τ ouverts $V_1, V_2, \dots, V_n$ tels que $G = [V_1, V_2, \dots, V_n]$.

Or $\{x\} \in G = [V_1, V_2, \dots, V_n] \Rightarrow \{x\} \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$ et $\forall k, \{x\} \cap V_k \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in V_k \ \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$\Rightarrow x \in \bigcap_{k=1}^n V_k \in \tau$.

Et donc $h(\bigcap_{k=1}^n V_k) \subset [V_1, V_2, \dots, V_n] \subset H$.

D'où $\forall \tau_v$ -voisinage H de $h(x) \ \exists \tau$ -voisinage $G = \bigcap_{k=1}^n V_k$ de x tel que $h(G) \subset H$.

L'application h est donc continue en x pour τ et τ_v .

D'où h est continue sur X car continue en tout $x \in X$.

— L'application $h^{-1} : h(X) \equiv \{\{x\} : x \in X\} \mapsto X, \{x\} \mapsto x$: est continue sur $h(X)$ pour τ_v et τ .

Soit $\{x\} \in h(X)$ et G un τ -voisinage de $h^{-1}(\{x\}) = x$.

Prenons $H = [V]$ avec $\emptyset \neq V = \text{int}_\tau(G)$, G étant un voisinage de x , $x \in \text{int}_\tau(G) = V$

$\Rightarrow [V] = \{E \in Fe_\tau(X) \mid E \subset V\}$.

Ainsi, $\{x\} \in Fe_\tau(X)$ avec $\{x\} \subset V = \text{int}_\tau(H) \subset H$.

$\Rightarrow H$ est un τ_v -voisinage de $\{x\}$.

D'où $\forall \tau$ -voisinage G de $h^{-1}(\{x\}) = x \exists$ un τ_v -voisinage H de $\{x\}$ tel que $h^{-1}[H \cap h(X)] \subset G \Rightarrow h^{-1}$ est continue en $\{x\}$ pour τ_v et τ .

Enfin il est évident que $h : X \mapsto \{\{x\} : x \in X\}$ est une bijection d'inverse h^{-1} définie ci-haut.

h est donc un homéomorphisme sur X et par conséquent τ_v est une hypertopologie.

4.2.1 Propriétés générales

(a) Propriété 1

Soit (X, τ) un espace topologique et τ_v une hypertopologie.

Si $U \in \tau$ alors $\{A \in Fe_\tau(X) \mid A \subset U\} \in \tau_v$.

Démonstration

Soit $B \in \{A \in Fe_\tau(X) : A \subset U\}$.

$B \in \{A \in Fe_\tau(X) : A \subset U\} \Rightarrow \emptyset \neq B \in Fe_\tau(X)$ et $B \subset U$, ie $B \cap U \neq \emptyset$.

Prenons $[U] = \{A \in Fe_\tau(X) \mid A \subset U \text{ et } A \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{A} \equiv \text{base de } \tau_v$, on

a :
 $B \in [U] \equiv \{A \in Fe_\tau(X) \mid A \subset U \text{ et } A \cap U \neq \emptyset\}$

$$\subset \{A \in Fe_\tau(X) : A \subset U\}$$

D'où $\exists [U] \in \mathcal{A}$ tel que $B \in [U] \subset \{A \in Fe_\tau(X) : A \subset U\}$

Et donc $\{A \in Fe_\tau(X) : A \subset U\}$ est un τ_v -voisinage de B , $\forall B \in \{A \in Fe_\tau(X) : A \subset U\}$

$\Rightarrow \{A \in Fe_\tau(X) : A \subset U\} \in \tau_v$

(b) Propriété 2

Soit (X, τ) un espace topologique et τ_v une hypertopologie.

Si $V \in \tau$ alors $\{A \in Fe_\tau(X) \mid A \subset V\}$ est un τ_v -fermé.

Démonstration

Notons $\mathcal{E} = \{A \in Fe_\tau(X) \mid A \subset V\}$.

Considérons $\mathcal{D} = \mathbb{C}_{\mathcal{E}}^{Fe_\tau(X)}$.

$\Rightarrow \mathcal{D} = \{A \in Fe_\tau(X) \mid A \not\subset V\} = \{A \in Fe_\tau(X) \mid A \subset \mathbb{C}_V^X\}$

Montrons que $\mathcal{D} \in \tau_v$

Soit $B \in \mathcal{D}$.

$B \in \mathcal{D} \Rightarrow B \in Fe_\tau(X)$ et $B \subset \mathbb{C}_V^X$, c'est-à-dire $B \cap \mathbb{C}_V^X \neq \emptyset$.

Prenons $[\mathbb{C}_V^X] = \{A \in Fe_\tau(X) \mid A \subset \mathbb{C}_V^X \text{ et } A \cap \mathbb{C}_V^X \neq \emptyset\} \in \mathcal{A} \equiv \text{base de } \tau_v$
 $\Rightarrow B \in [\mathbb{C}_V^X] \subset \mathcal{D}$
 C'est-à-dire $\exists [\mathbb{C}_V^X] \in \mathcal{A}$ tel que $B \in [\mathbb{C}_V^X] \subset \mathcal{D}$
 $\Rightarrow \mathcal{D}$ est un τ_v -voisinage de B, $\forall B \in \mathcal{D}$
 $\Rightarrow \mathcal{D} \in \tau_v$
 D'où $\mathcal{E} = \mathbb{C}_{\mathcal{D}}^{Fe_\tau(X)}$ est τ_v -fermé.

5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons présenté les notions de base des hypertopologies, en accordant une attention particulière aux hypertopologies engendrées par une topologie ou par une métrique. Il sied toutefois de signaler que la définition que nous avons donnée est générale, donc vérifiée par toutes les hypertopologies quelles que soient leurs origines. Dans le futur, nous envisageons examiner les applications de ces notions des mathématiques pures.

Références

- Bartsch, R., 2018. Hyperspaces in Topological Spaces. Technical Report. TU Darmstadt.
- Illanes, A., Nadler, S., 1999. Hyperspaces : Fundamentals and Recent Advances. Routledge.
- Mbikayi, T.F., 2012. Construction des hypertopologies de Vietoris, de Fell, de Hausdorff et de Wijsman. Université de Kinshasa .
- Mubenga, K.P., 2018. Topologie générale. Technical Report. Université de Kinshasa.